

一种基于种群熵的混沌小世界优化算法

袁明新, 杜海峰, 王孙安, 庄健

(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对小世界算法在复杂函数优化中存在的停滞现象, 以及低局域短连接的搜索效率问题, 提出了一种基于种群熵的混沌小世界算法. 根据信息熵建立了种群个体浓度, 并以个体浓度和个体适应度作为评价标准进行高浓度的个体更替, 从而实现了种群的自我调节和多样性保持. 利用混沌变量的遍历性和随机性, 通过 Logistic 映射生成初始种群, 采用混沌扰动对短连接后的个体进行局部搜索, 从而提高了小世界算法的搜索效率和搜索精度. 试验结果表明, 该算法不仅明显改善了小世界算法的搜索能力, 而且搜索效率也得到了显著提高.

关键词: 种群熵; 混沌; 小世界算法; 函数优化

中图分类号: O224 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)09-1137-05

Chaos Small-World Optimal Algorithm Based on Population Entropy

YUAN Mingxin, DU Haifeng, WANG Sun'an, ZHUANG Jian

(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To avoid trapping into local minimum and improve searching efficiency of local short-range operator during the function optimization, a chaos small-world optimal algorithm based on population entropy is presented. The individual density, constructed according to the information entropy, and fitness are taken as the evaluation criterion, and the individuals of high density are replaced by new initial individuals, which achieve the self-adjustability and diversity of population. The characteristics of ergodicity and randomness of chaotic variables are considered to produce the initial population with logistic mapping, and the individual local search is performed by chaos disturbance after local short-range search, thus the searching efficiency and accuracy are obviously heightened. The simulation results show that the proposed algorithm remarkably improved the searching capacity and efficiency in small-world algorithm.

Keywords: population entropy; chaos; small-world algorithm; function optimization

1967年, 美国社会心理学家 Milgram 通过追踪美国社交网络中的最短路径, 提出了著名的小世界网络^[1], 即人们所熟知的六度分离. Milgram 通过试验揭示了2个发现: ①短链效应普遍存在; ②人们可以找到短链. 1998年 Watts 和 Strogatz^[2]在 Nature 杂志上提出了比较严谨的 WS 数学模型, 从理论上构建了具有小世界现象的网络, 从此复杂网络特性研究成为国内外学者关注的前沿, 并在路由优化^[3]、疾病传播^[4]等领域取得了丰硕成果. 借鉴小世界现

象中有效信息的传递机理^[5], 文献[6]提出一种新的仿社会函数优化算法——小世界算法, 但小世界算法在优化过程中强调领域搜索, 使得其容易陷入停滞状态, 另外算法的局域搜索机制比较简单, 影响了算法的收敛性和快速性. 针对前者, 文献[7]借鉴 Milgram 社会学的试验措施, 提出了具有跟踪替代特征的小世界算法(TSWA), 但对于后者未做进一步改进. 为了解决基本小世界算法(SSWA)中的不足, 本文利用信息熵来获得个体浓度, 并结合适应度

建立个体评价标准,通过个体替换保持种群的多样性,同时利用混沌优化改善初始种群及局域短连接的搜索效率.

1 小世界优化问题的描述和定义

Milgram 试验中的小世界现象,揭示了客观世界许多复杂网络运动中最为有效的信息传递方式,即一个高度聚集的包含了“局部连接”节点的子网,连同一些有助于产生短路径的长距离随机连接就可以提高信息传递效率^[5].小世界优化过程如图1所示,其将优化过程视为在网络空间中从候选节点向最优节点转移的一种信息传递过程,同时在转移过程中考虑了小世界效应,即一个候选节点通过短距离连接和随机长距离连接向最优节点转移,而在该过程中传递的信息是优化模型解.

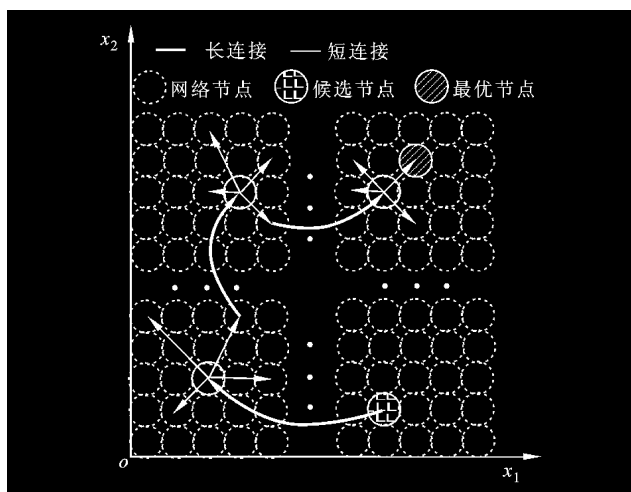


图1 二维网络空间小世界算法的搜索原理
不失一般性,考虑如下优化模型

$$J = \min_{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m} f(x), x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad (1)$$

式中: J 为模型解; $f(x)$ 为目标函数; Ω 为 x 的定义域; m 为 x 的维数; $x_i \in [d_i, u_i]$.为了便于算法描述,首先给出一些基本定义.

定义1 S 为 N 维网络传递节点集(种群),节点(个体) $s \in S, s = a_1, a_2, \dots, a_m$,是对应 m 维 x 的编码. a_i 是 x_i 的编码,记为 $a_i = e(x_i)$,而 x_i 称为 a_i 的解码,记为 $x_i = e^{-1}(a_i)$,其中 e 和 e^{-1} 分别表示编码和解码方式.本文编码形式采用二进制($\forall 1 \leq i \leq m$),即 $a_i = a'_{i1}a'_{i2}, \dots, a'_{il_i}, a'_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq l_i$ (2)

因此,个体 s 的串长为 $M = \sum_{i=1}^m l_i$.

定义2 $\forall s_i \in S$,节点 s_i 的 l 邻域集合为

$$\zeta^l(s_i) = \{s_j \mid 0 < \|s_i - s_j\| \leq l, s_j \in S\} \quad (3)$$

式中: $\|s_i - s_j\|$ 为海明距离.

定义3 传递 s_i 的非 l 邻域集合为

$$\bar{\zeta}^l(s_i) = \{s_j \mid \|s_i - s_j\| > l, s_j \in S\} \quad (4)$$

定义4 传递节点集(种群)的平均信息熵为

$$H(N) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M H_j(N) \quad (5)$$

$$H_j(N) = \sum_{i=0}^1 (-p_{ij} \lg p_{ij}) \quad (6)$$

式中: H_j 为 N 个个体在第 j 位的信息熵; p_{ij} 为 N 个个体中在第 j 位为符号 i 的概率.

定义5 个体 s_i 和 s_j 之间的相似度为

$$A_{ij} = \frac{1}{1 + H(2)} \quad (7)$$

2 基于信息熵的混沌小世界算法

2.1 小世界及混沌优化算子

小世界优化算法主要包括局域短连接搜索的 Ψ 操作和随机长连接搜索的 Γ 操作.给定节点 $s_i(k)$ 的邻域空间 $R_i(k) \subseteq \zeta^l(s_i(k))$, Ψ 操作主要是将信息从 $s_i(k)$ 传递给 $R_i(k)$ 中距离目标解的最近节点 $s_i(k+1)$,即

$$s_i(k+1) \leftarrow \Psi(s_i(k)) = \{s_i^* \in R_i(k) \mid f(e^{-1}(s_i^*)) = \min_{s_j(k) \in R_i(k)} (f(e^{-1}(s_j(k))))\} \quad (8)$$

Γ 操作主要是在给定全局长连接概率 p_c 的条件下,在 $s_i(k)$ 非邻域 $\bar{\zeta}^l(s_i(k))$ 内随机选取一点进行远距离信息传递,即

$$s_i(k+1) \leftarrow \Gamma(s_i(k)) = \{s''_i(k) \mid p < p_c, s''_i(k) \in \bar{\zeta}^l(s_i(k)), p = \text{rand}()\} \quad (9)$$

Ψ 和 Γ 的具体操作步骤见文献[6].

在SSWA中, Ψ 操作采用随机选取方式,影响了算法局域搜索能力,另外初始种群通过随机产生,很难保证种群中含有丰富模式.因此,文中对SSWA进行混沌优化,具体操作是采用混沌映射产生初始种群,利用混沌扰动进行节点短连接后再进行局域搜索.考虑到Logistic方程的全局稳定性好、计算量小,可通过式(10)产生混沌序列以组成初始种群

$$z(k+1) = \eta z(k)(1 - z(k)) \quad (10)$$

$$z(k) \in (0, 1), z(k) \notin \{0.25, 0.5, 0.75\}$$

式中: η 为混沌吸引子,当 $\eta=4$ 时,Logistic映射为 $(0, 1)$ 区间的满映射; $z(k)$ 为第 k 次迭代产生的混沌变量.

短连接后节点的混沌扰动为

$$\beta'(k) = (1 - \alpha)\beta^* + \alpha\beta(k) \quad (11)$$

$$\beta^* = \Theta(x^*) \quad (12)$$

式中: β^* 为最优混沌向量; x^* 为当前函数最优解; Θ 为解空间向混沌空间的映射; $\beta(k)$ 为迭代 k 次后的混沌向量; $\beta'(k)$ 为施加扰动后的混沌向量; α 为调节系数且由下式确定

$$\alpha = 1 - |(k-1)/k|^p \quad (13)$$

式中: p 为整数,本文取 $p=2$; k 为混沌扰动迭代代数.

2.2 基于信息熵的种群更新算子

为了解决SSWA中的停滞问题,文中引入了信息熵,通过替换高浓度个体来保持种群的多样性.具体操作如下.

步骤1 对群体 $S(k)$ 按适应度进行排序操作(T),并获得新群体,即

$$S'(k) \leftarrow T(S(k)) = T(\{s_1, s_2, \dots, s_N\}) = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_N\} \quad (14)$$

$\forall 1 \leq i < j \leq N$, 满足 $f(e^{-1}(s'_i)) \leq f(e^{-1}(s'_j))$.

步骤2 计算个体浓度.为了保证对适应度低的高浓度个体进行替换,文中采用一种递推计算方式

$$\forall s'_i \in S'(k), \quad 1 \leq i \leq N$$

个体 s'_i 的浓度为

$$D_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^i Q_{ij} \quad (15)$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & A_{ij} > q \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

式中: q 为相似度域值; A_{ij} 为个体相似度.

步骤3 设定浓度域值 v ,选择高浓度群体

$$S''(k) = \{s''_1, s''_2, \dots, s''_t\} \subseteq S'(k)$$

$$\forall s''_i \in S''(k), \quad 1 \leq i \leq t, \quad D_i \geq v$$

步骤4 对高浓度个体进行替换,并获得新群体

$$S(k+1) = (S'(k) - S''(k)) \cup S^\circ = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_{N-t}, s_1^\circ, s_2^\circ, \dots, s_t^\circ\} \quad (16)$$

$$S^\circ \cap (S(k) - S'(k)) = \phi$$

式中: S° 为随机产生的群体,其规模与 $S''(k)$ 相同.

2.3 算法流程

步骤1 对种群规模 N 、算法的最大迭代代数 $k_{\max}$ 、 l 、 p_c 、 q 、 v 和 $k \leftarrow 0$ 进行初始化.

步骤2 利用Logistic方程式(10)生成 $S(0)$.

步骤3 对 $S(k) = \{s_1(k), s_2(k), \dots, s_N(k)\}$ 进行以下小世界优化操作:① $S'(k) \leftarrow S(k)$;②按照 p_c 进行

随机长距离连接,即 $s'_i(k+1) \leftarrow \Gamma(s'_i(k))$, $s'_i(k) \in S'(k)$, $1 \leq i \leq N$;③进行局域短连接搜索,即 $s''_i(k+1) \leftarrow \Psi(s'_i(k+1))$, $1 \leq i \leq N$;④若 $f(e^{-1}(s''_i(k+1))) < f(e^{-1}(s_i(k)))$,则 $s_i(k) \leftarrow s'_i(k+1)$, $1 \leq i \leq N$.

步骤4 对 $S(k)$ 进行以下混沌扰动优化操作:①从 $S(k)$ 中选择 $\text{fix}(\mu N)$ 个适应度较小的个体组成 $S'(k) = \{s_1(k), s_2(k), \dots, s_l(k)\}$, $\text{fix}(\cdot)$ 为取整函数;②从编码空间到混沌空间映射,即 $x(k) \leftarrow e(s_i(k))$, $\beta(k) \leftarrow \Theta(x(k))$, $1 \leq i \leq \text{fix}(\mu N)$;③按照式(11)对 $\beta(k)$ 进行混沌扰动.

步骤5 判断是否满足结束条件: $k = k_{\max}$ 或 $|f(e^{-1}(s^*)) - f^*| \leq \epsilon$,其中 s^* 为当前代中最优个体, f^* 为目标函数最优解.若满足条件,结束并输出最优解;否则,进行下面的操作.

步骤6 基于信息熵的种群更新.

步骤7 执行 $k \leftarrow k+1$,返回步骤3.

3 试验与讨论

3.1 函数测试

为了验证CSWA的优化性能,针对6组函数^[7],即Rosenbrock函数 f_1 、Schaffer的 f_6 函数 f_2 、Shubert函数 f_3 、Needle-in-a-haystack函数 f_4 、Brannin函数 f_5 、Griewank函数 f_6 ,利用Matlab7.0在PIV 2.99 GHz, 512 MB内存的计算机上进行测试,并与TSWA^[8]、混沌遗传算法^[9](CGA)进行了比较.

考虑到算法的随机性,每种函数共进行了50次独立随机试验.CSWA参数的设置: N 为20, $k_{\max}$ 为1 000, l 为1, p_c 为0.8, q 为0.9, v 为0.07, μ 为0.6. TSWA除停留次数为30外,其余与CSWA中的相关参数相同. CGA中的种群数为20,交叉概率为0.8,变异概率为0.1,混沌参数与CSWA中的相同.

由表1可以看出,CGA利用混沌搜索改善了遗传算法的局部寻优能力,因此对单峰病态函数 f_1 、多全局极小点函数 f_3 和 f_5 比较有效,且效果比TSWA好,但对于多局部极小点函数 f_2 和 f_6 ,局部极小点距最优较远的函数 f_4 的效果并不理想,这是因为CGA未能改善早熟引起的停滞问题. TSWA通过跟踪替代改善了停滞问题,因此对函数 f_2 、 f_4 和 f_6 寻优效果较好,但由于未改善局部寻优能力,因此对函数 f_1 不能完全寻优. CSWA采用高浓度个体的替换策略,较好地保持了种群多样性,同

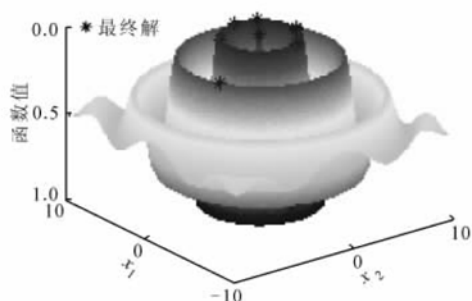
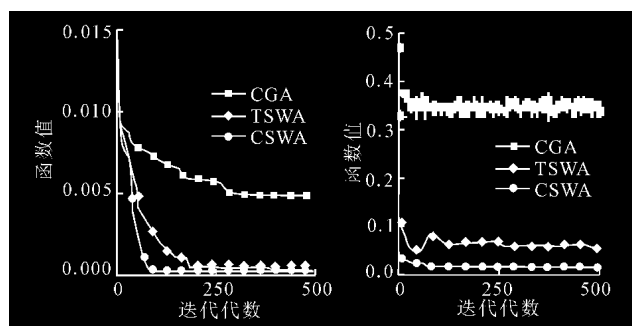
表1 CGA、TSWA 和 CSWA 函数的测试结果

函数	精度	最优解次数			最大代数			平均代数			代数标准差		
		CGA	TSWA	CSWA	CGA	TSWA	CSWA	CGA	TSWA	CSWA	CGA	TSWA	CSWA
f_1	10^{-3}	50	28	50	581	928	71	134.66	428.39	21.36	123.46	259.28	14.35
f_2	10^{-4}	33	50	50	795	435	156	545.58	117.28	59.18	219.53	104.59	77.06
f_3	10^{-2}	50	50	50	239	754	22	77.74	180.28	7.44	41.61	168.55	4.30
f_4	10^{-1}	50	50	50	527	356	242	122.30	75.40	52.52	84.65	74.95	42.39
f_5	10^{-4}	50	50	50	183	187	16	27.34	35.08	4.88	20.23	33.68	2.29
f_6	10^{-3}	31	50	50	841	156	112	536.88	89.72	45.50	234.86	54.29	42.21

注:TSWA 中 $f_1 \sim f_3$ 函数的测试结果来自文献[7].

时利用混沌扰动增强了算法局部搜索能力,实现了6种函数的完全寻优。

针对 Schaffer 的 f_6 函数的某次寻优(见图2)可以看出,CSWA 在搜索到全局最小点的同时也搜索到了局部极小点,因此较好地体现了解的多样性。同样,针对 Schaffer 的 f_6 函数进行3种算法的50次独立随机试验,每次试验寻优500代,并观察平均函数值的变化情况(见图3)。由图3的最优平均值曲线可以看出,CSWA 收敛速度最快,而 CGA 收敛速度最慢。

图2 Schaffer 的 f_6 函数的 CSWA 解分布

(a) 最优平均值

(b) 平均值

图3 Schaffer 的 f_6 函数的寻优收敛曲线

3.2 算法参数的影响试验

表1显示了CSWA 优良的优化性能,但对于不同的函数,采用不同形式的算法可能会得到不同的

结果。本文针对 CSWA 中全局长连接概率、相似度域值等主要参数进行了研究。

3.2.1 全局长连接概率选择 CSWA 中的 Γ 操作有利于产生新节点模式,使得算法保持种群的多样性,并跳出局部最优,而 p_c 选择则是 Γ 操作的关键。针对上述6种函数,在保持其他算法参数不变的情况下, p_c 在 $[0, 1]$ 范围内由小到大进行重复独立试验50次,并观察归一化的平均迭代代数的变化情况(见图4)。

由图4可以看出, p_c 对多局部极小点函数 f_2 和 f_6 ,局部极小点距最优点较远的函数 f_4 影响较大,这是因为 p_c 的大小直接影响了小世界算法的长连接效果。当 p_c 较小时,算法长连接效果变得不明显,一旦算法陷入局部极小点将很难跳出,而其他单峰、多全局极小点函数受 p_c 影响相对较小,这是因为混沌映射生成了分布均匀的初始种群,再加上小世界的局域搜索和混沌扰动,使得函数寻优比较容易。对比6种函数的 p_c 选取试验结果可以看出,对 p_c 的选取应适当, p_c 偏小收敛代数增加,算法不稳定, p_c 过大则会造成搜索不稳定。试验表明,当 p_c 在0.8左右时,搜索效果相对最优。

3.2.2 相似度域值的选择 在CSWA 中,可采用高浓度个体替换策略来保持种群的多样性。在个体浓度计算中, q 是一个非常关键的参数, q 的大小会直接影响个体之间的相似性,从而影响个体的浓度。同样,针对上述6种函数,在保持其他算法参数不变的情况下, q 由小到大在 $[0, 1]$ 范围内进行重复独立试验50次,并观察归一化的平均迭代代数的变化情况(见图5)。可以看出, q 的大小对多局部极小点函数 f_4 和 f_6 影响较大,尤其是后者,这是因为 q 选取不当影响了种群的多样性,寻优时往往会陷入局部极小点。对于函数 f_2 ,由于其局部极小点多在全局

最优点周围,因此小世界算法的长连接和混沌局部寻优使其受 q 影响较小,其余多全局极小点和单峰函数受 q 影响也很小。

对比6种函数的测试结果可以看出,对 q 的选择也应适中, q 过大个体浓度将会降低,种群更新时个体被替换的概率也将降低,致使算法很容易陷入停滞状态; q 过小则个体浓度将会增大,个体被替换概率也增大,种群多样性变好,但算法容易陷入随机状态。试验表明,当 q 在0.9左右时,优化效果最好。

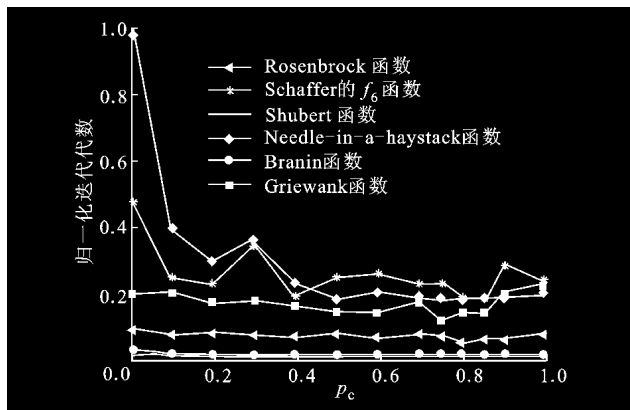


图4 全局长连接概率选取试验结果

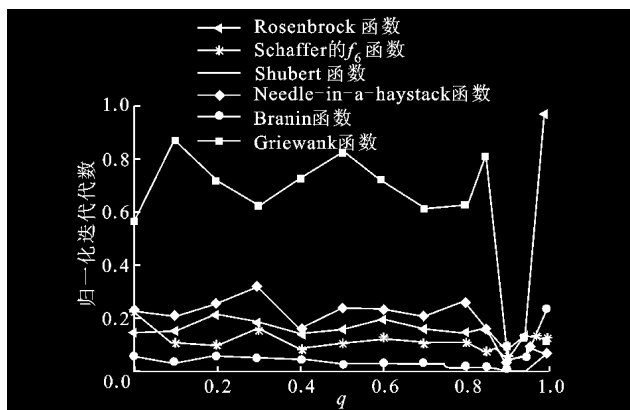


图5 相似度域值选择试验结果

3.2.3 其他参数的选择 针对算法中其他参数如 N 、 v 等,本文也进行了相关试验。试验结果表明,当 N 为20、 v 为0.07、 μ 为0.6时,CSWA函数的优化效果较好。

4 结 论

本文在基本小世界算法的基础上,针对其存在的停滞和低局域搜索效率的问题,提出了一种基于种群熵的混沌小世界算法,与基本小世界算法相比,具有以下特点。

(1)以个体浓度和适应度作为评价标准,通过高浓度个体替换,较好地保持了种群的多样性,避免了算法陷入停滞状态。

(2)利用混沌的遍历性等特性,通过混沌映射生成了具有较好模式的初始种群。

(3)利用混沌扰动弥补了小世界局域短连接的不足,提高了小世界算法的局域搜索能力。

大量函数的优化试验表明,混沌小世界算法无论在搜索能力还是在搜索效率方面都得到了极大的提高,而基于混沌小世界算法的参数研究,将有助于进一步发挥小世界算法的函数优化作用。

参考文献:

- [1] KLEINBERG J M. The small-world phenomenon and decentralized search [J]. SIAM News, 2004, 37(3): 1-2.
- [2] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of small-world networks [J]. Nature, 1998, 393(4): 440-442.
- [3] ZENG J Y, HSU W J. Optimal routing in a small-world network [C]//Proceedings of 2005 6th International Conference on Parallel and Distributed Computing, Applications and Technologies. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005: 610-614.
- [4] ZERKRI N, CLERE J P. Statistical and dynamical study of disease propagation in a small world network [J]. Physical Review: E, 2002, 65(2): 1-7.
- [5] KLEINBERG J M. Navigation in a small world [J]. Nature, 2000, 406(8): 845.
- [6] 杜海峰, 庄健, 张进华, 等. 用于函数优化的小世界优化算法 [J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(9): 1011-1015. DU Haifeng, ZHUANG Jian, ZHANG Jinhua, et al. Small-world phenomenon for function optimization [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(9): 1011-1015.
- [7] 杜海峰. 小世界优化算法测试函数及实验结果 [EB/OL]. [2007-02-15]. <http://202.117.58.58/website/testData.htm>.
- [8] 陈煜聪, 杨斌, 杜海峰, 等. 一种具有跟踪替代特征的小世界算法 [J]. 西安交通大学学报, 2007, 41(11): 1360-1363. CHEN Yucong, YANG Bin, DU Haifeng, et al. Small-world algorithm with the replacing and tracking characters [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2007, 41(11): 1360-1363.
- [9] CHENG Chuntian, WANG Wenchuan, XU Dongmei, et al. Optimizing hydropower reservoir operation using hybrid genetic algorithm and chaos [J]. Water Resource Management, 2007(7): 1573-1587.

(编辑 管咏梅)